

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет Прикладной математики – процессов управления
Кафедра МЭКС

Ефимов Максим Русланович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Моделирование периодической системы полевых катодов в прямоугольной решетке

Направление 010900

«Прикладные математика и физика и процессы управления»

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Егоров Н. В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Виноградова Е. М.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Рубцова И.Д.

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение	3
1 Математическое моделирование системы полевых катодов	5
1.1 Физическая постановка задачи для многоэмиттерной системы .	5
1.2 Математическая модель системы полевых катодов	6
1.3 Решение граничной задачи методом разделения переменных . .	7
1.4 Численный расчет системы полевых катодов	13
1.4.1 Реализация задачи на языке C++	13
1.4.2 Многопоточная реализация программы с использованием OpenMP	17
2 Расчет радиуса кривизны экрипотенциалей в системе полевых катодов	19
2.1 Численный расчет радиуса кривизны экрипотенциалей на оси катода	19
2.2 Численный расчет радиуса кривизны экрипотенциалей на плоскости $y = 0$	21
Заключение	25
Список литературы	27

Введение

Холодной автоэлектронной эмиссией называется процесс, при котором какое-либо тело без предварительного возбуждения испускает электроны под действием внешнего поля [1].

Преимущество холодных полевых эмиттеров относительно термокатодов заключается в том, что они не требуют накала и позволяют достичь больших плотностей токов (до 10^6 А/см²). Благодаря данной особенности, полевые эмиттеры привлекательны в создании приборов малых размеров [2].

Разность потенциалов, получаемая между холодным полевым катодом и анодом, является источником электростатического поля в системе, достаточного для возникновения полевой электронной эмиссии в случае, если катод имеет форму тонкого острия с радиусом кривизны на вершине в доли микрона. Однако, стабильные значения тока, получаемого с отдельного полевого острия, малы. Поэтому, для того, чтобы получить большие значения тока, требуются катоды, представляющие собой многоострийные системы (Рисунок 1) [3, 4].

Целью данной работы является построение математической модели многоэмиттерного полевого катода в виде периодической системы острий и нахождение распределения электрического потенциала во всей области рассматриваемой системы.

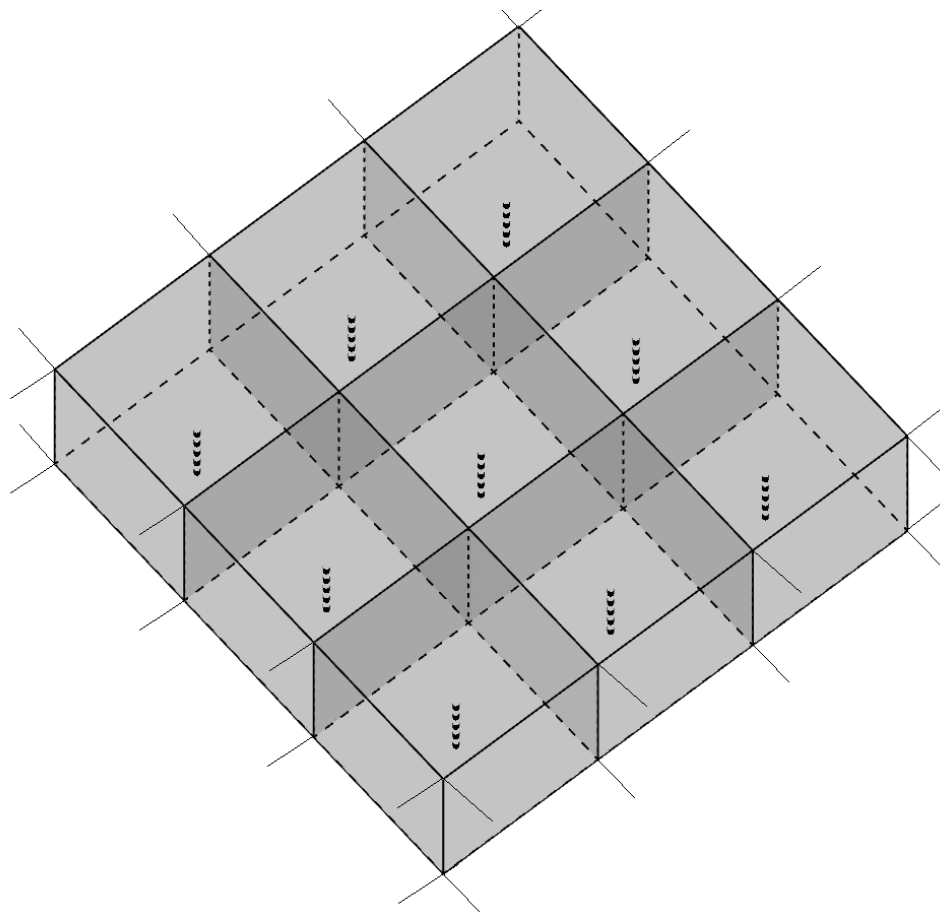


Рис. 1: Модель периодической диодной эмиссионной системы.

Глава 1

Математическое моделирование системы полевых катодов

1.1 Физическая постановка задачи для много- эмиттерной системы

Задана периодическая система полевых острий, расположенных в периодической прямоугольной решетке, каждое острие — в центре своей ячейки.

Задача решалась в декартовой системе координат (x, y, z) методом разделения переменных. В силу периодичности рассматривалась одна ячейка высоты z_{M+1} с периодами T_1 и T_2 по x и y соответственно. В данной системе катод является острием, расположенным на плоской подложке, анод задается как плоскость, параллельная подложке. Длина острия равна z_M . Для моделирования влияния полевого острия рассматривалось влияние системы зарядов, лежащих на оси z таким образом, чтобы форма острия совпадала с нулевой эквипотенциалью, образованной распределением потенциала. Напряжение на катоде и подложке равно нулю, на анод подаётся постоянное напряжение U_0 . На рисунке 1.1 представлена одна ячейка периодической системы [5, 6].

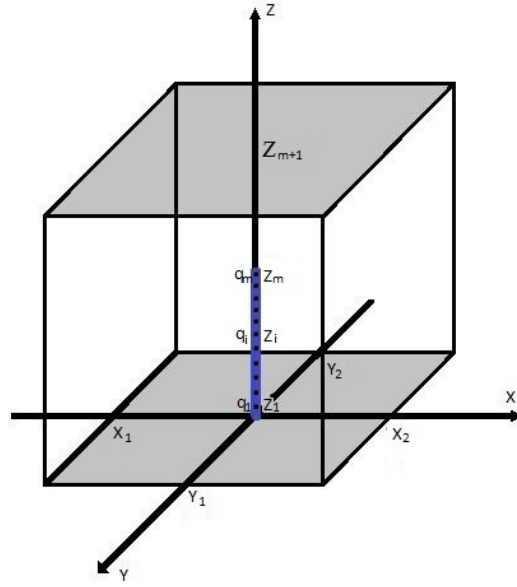


Рис. 1.1: Схематическое изображение диодной эмиссионной системы.

Параметры задачи: T_1 — период по оси x ; T_2 — период по оси y ; $z = 0$ — поверхность подложки; напряжение на катоде и подложке равно нулю; число точечных зарядов — M ; поверхность анода — $z = z_{M+1}$; напряжение на аноде — U_0 ; величина m -го точечного заряда — q_m ; координата m -го точечного заряда по оси z — z_m , $m = \overline{1, M}$.

1.2 Математическая модель системы полевых катодов

По физической модели, представленной в предыдущем разделе, строится математическая модель, которая заключается в нахождении функции $U(x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению Пуассона и граничным условиям. Уравнение Пуассона [7]:

$$\Delta U(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \quad (1.1)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=x_2} = 0; \\ \left. \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \left. \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=y_2} = 0; \\ U(x, y, 0) = 0; \\ U(x, y, z_{m+1}) = U_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

1.3 Решение граничной задачи методом разделения переменных

Решение задачи (1.1)–(1.2) будем искать в виде суммы общего и частного решений. Для этого решим уравнение Лапласа в декартовых координатах [9]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

с заданными граничными условиями методом разделения переменных. Представим U в виде

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)v(z). \quad (1.3)$$

Получим уравнение:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{v''}{v} = 0.$$

Полагая $X''/X = \alpha^2$, $Y''/Y = \beta^2$ и $v''/v = \gamma^2$, получим:

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\gamma^2;$$

$$X'' + \alpha^2 X = 0;$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0;$$

где решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x; \quad (1.4)$$

$$Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y. \quad (1.5)$$

Подставив (1.4), (1.5) в (1.3), получим:

$$U(x, y, z) = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)(C \cos \beta y + D \sin \beta y)v(z). \quad (1.6)$$

Однородные граничные условия по переменной x и уравнение (1.4) приводят к системе:

$$\begin{cases} A \cos \alpha x_1 + B \sin \alpha x_1 = 0; \\ A \cos \alpha x_2 + B \sin \alpha x_2 = 0; \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{x_2 - x_1}; \quad (1.7)$$

$$A = B \frac{\cos \alpha x_1}{\sin \alpha x_1}. \quad (1.8)$$

Аналогично, из однородных граничных условий по переменной y и уравнения (1.5):

$$\begin{cases} C \cos \beta y_1 + D \sin \beta y_1 = 0; \\ C \cos \beta y_2 + D \sin \beta y_2 = 0; \end{cases}$$

получим:

$$\beta_k = \frac{\pi k}{y_2 - y_1}; \quad (1.9)$$

$$C = D \frac{\cos \beta y_1}{\sin \beta y_1}. \quad (1.10)$$

Перепишем (1.6) с учетом (1.7), (1.8), (1.9), (1.10):

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{k,n}(z) \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right).$$

Далее решаем задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}; \quad (1.11)$$

где

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_m, & |x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon, \quad |z - z_k| < \delta; \\ 0, & else. \end{cases}$$

Переходим к пределу, полагая:

$$\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} 8\rho_m \varepsilon^2 \delta = q_m.$$

Неизвестную функцию $v_{k,n}(z)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v_{k,n}(z) = & \frac{\alpha}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} U(x, y, z) \times \\ & \times \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right) dy dx, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 1, k = 0, n = 0; \\ 2, k = 0, n > 0 \vee n = 0, k > 0; \\ 4, k > 0, n > 0. \end{cases}$$

Домножим (1.11) на $\cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right)$ и проинтегрируем по соответствующим переменным:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right) dy dx + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right) dy dx + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right) dy dx = \\ & = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(x, y, z) \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{y_2 - y_1}\right) dy dx. \end{aligned}$$

В силу периодичности системы по переменным x и y можно выделить одну ячейку с границами, представленными формулами:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{T_1}{2}; \\ x_2 = \frac{T_1}{2}; \\ y_1 = -\frac{T_2}{2}; \\ y_2 = \frac{T_2}{2}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Учитывая (1.12), (1.13), для функции $v_{k,n}(z)$ получаем:

$$\begin{aligned} & -\left(\left(\frac{\pi n}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{T_2}\right)^2\right) \frac{T_1 T_2}{\alpha} v_{k,n}(z) + \frac{T_1 T_2}{\alpha} v''_{k,n}(z) = \\ & = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(x, y, z) \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{T_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{T_2}\right) dy dx. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & v''_{k,n}(z) - \gamma_{k,n}^2 v_{k,n}(z) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0 T_1 T_2} \varphi(z) \times \\ & \times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{T_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{T_2}\right) dy dx, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k,n}^2 &= \left(\frac{\pi n}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{y_2 - y_1}\right)^2 = \left(\frac{\pi n}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{T_2}\right)^2; \\ \varphi(z) &= \begin{cases} \rho_m, & |z - z_k| < \delta; \\ 0, & else. \end{cases} \end{aligned}$$

Интегрируя и преобразовывая (1.15), получаем:

$$\begin{aligned} & v''_{k,n}(z) - \gamma_{k,n}^2 v_{k,n}(z) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0 \pi^2 k n} \varphi(z) \times \\ & \times \left(2 \sin \frac{\pi n \varepsilon}{T_1} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1}\right) \left(2 \sin \frac{\pi k \varepsilon}{T_2} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2}\right). \end{aligned}$$

Заменим синус малого аргумента самим аргументом:

$$v''_{k,n}(z) - \gamma_{k,n}^2 v_{k,n}(z) = -\frac{4\alpha \varepsilon^2 \varphi(z)}{\epsilon_0 T_1 T_2} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2}. \quad (1.16)$$

Решение уравнения (1.16) будем искать в виде:

$$v_{k,n}(z) = C_1(z) \cosh(\gamma_{k,n}z) + C_2(z) \sinh(\gamma_{k,n}z). \quad (1.17)$$

Согласно методу вариации постоянных, для $C_1(z)$ и $C_2(z)$ получаем уравнения:

$$C_1'(z) \cosh(\gamma_{k,n}z) + C_2'(z) \sinh(\gamma_{k,n}z) = 0;$$

$$\gamma_{k,n}(C_1'(z) \sinh(\gamma_{k,n}z) + C_2'(z) \cosh(\gamma_{k,n}z)) = -\frac{4\alpha\varepsilon^2\varphi(z)}{\epsilon_0 T_1 T_2} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2}.$$

Отсюда

$$C_1'(z) = \frac{4\alpha\varepsilon^2\varphi(z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}z);$$

$$C_2'(z) = -\frac{4\alpha\varepsilon^2\varphi(z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \cosh(\gamma_{k,n}z);$$

$$C_1(z) = \frac{4\alpha\varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_0^z \varphi(\tau) \sinh(\gamma_{k,n}\tau) d\tau + C^*; \quad (1.18)$$

$$C_2(z) = -\frac{4\alpha\varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_0^z \varphi(\tau) \cosh(\gamma_{k,n}\tau) d\tau + C^{**}. \quad (1.19)$$

Подставив (1.18) и (1.19) в (1.17), получим:

$$\begin{aligned} v_{k,n}(z) = & C^* \cosh(\gamma_{k,n}z) + C^{**} \sinh(\gamma_{k,n}z) + \frac{4\alpha\varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \times \\ & \times \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_0^z \varphi(\tau) \sinh(\gamma_{k,n}(\tau - z)) d\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где постоянные C^* и C^{**} найдем из краевых условий (1.2). Первое условие дает:

$$C^* = 0. \quad (1.21)$$

Из второго условия:

$$\begin{aligned} & C^{**} \sinh(\gamma_{k,n} Z_{M+1}) + \\ & + \frac{4\alpha\varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_0^{Z_{M+1}} \varphi(\tau) \sinh(\gamma_{k,n}(\tau - Z_{M+1})) d\tau = U_0; \end{aligned}$$

$$C^{**} = U_0 \frac{z}{z_{M+1}} + \sum_{m=1}^M \frac{\alpha q_m \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi n y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}(z_{M+1} - z_m))}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{M+1})}. \quad (1.22)$$

Таким образом, с учетом (1.21) и (1.22), функция (1.20) имеет вид:

$$v_{k,n}(z) = \sum_{m=1}^M \frac{\alpha q_m \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi n y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}(z_{M+1} - z_m)) \sinh(\gamma_{k,n} z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{M+1})} + \\ + \frac{4\alpha \varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_0^z \varphi(\tau) \sinh(\gamma_{k,n}(\tau - z)) d\tau.$$

Для $z \leq z_m$ интеграл обратится в нуль:

$$v_{k,n}(z) = \sum_{m=1}^M \frac{\alpha q_m \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi n y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}(z_{M+1} - z_m)) \sinh(\gamma_{k,n} z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{M+1})}.$$

Для $z > z_m$ найдем:

$$v_{k,n}(z) = \sum_{m=1}^M \frac{\alpha q_m \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi n y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}(z_{M+1} - z_m)) \sinh(\gamma_{k,n} z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{M+1})} + \\ + \frac{4\alpha \varepsilon^2}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi k y_1}{T_2} \int_{z_m - \delta}^{z_m + \delta} \varphi(\tau) \sinh(\gamma_{k,n}(\tau - z)) d\tau, \\ v_{k,n}(z) = \sum_{m=1}^M \frac{\alpha q_m \cos \frac{\pi n x_1}{T_1} \cos \frac{\pi n y_1}{T_2} \sinh(\gamma_{k,n}(z_{M+1} - z)) \sinh(\gamma_{k,n} z_m)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{M+1})}.$$

Распределение потенциала примет вид:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M v_{k,n,m}(z) \cos\left(\frac{\pi n(x - x_1)}{T_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y - y_1)}{T_2}\right), \quad (1.23)$$

где

$$v_{k,n,m} = \begin{cases} \frac{\alpha q_m \cos(\frac{\pi n}{2}) \cos(\frac{\pi k}{2}) \sinh(\gamma_{k,n}(z_{m+1} - z_m)) \sinh(\gamma_{k,n} z)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{m+1})}, & z \leq z_m; \\ \frac{\alpha q_m \cos(\frac{\pi n}{2}) \cos(\frac{\pi k}{2}) \sinh(\gamma_{k,n}(z_{m+1} - z)) \sinh(\gamma_{k,n} z_m)}{\epsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n} \sinh(\gamma_{k,n} z_{m+1})}, & z > z_m. \end{cases}$$

1.4 Численный расчет системы полевых катодов

1.4.1 Реализация задачи на языке C++

Для численного расчета рассматриваемой системы была написана программа на языке C++ в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Параметры для расчета системы имеют следующие значения: $U_0 = 100$; $T_1 = 4$; $T_2 = 4$; $z_N = 0.5$; $z_{N+1} = 1$; $N = 10$; $z_m = z_{m-1} + z_N/N$; $q_m = -100$; $m = \overline{1, N}$.

Все значения параметров приведены в безразмерных величинах.

В результате работы программы получается массив с двумя выходными значениями — потенциал и координата расчетной точки. Далее программа модифицируется на вывод необходимых данных в файл. Используя полученный файл, строится распределение потенциала в заданной области (Рисунки 1.2 и 1.3). Графики получены с помощью приложения gnuplot 5.0.

Для сравнения были построены графики с приведенными выше параметрами при варьировании периодов ячейки T_1 и T_2 .

Рисунки 1.4 и 1.5 соответствуют параметрам $T_1 = T_2 = 2$.

Рисунки 1.6 и 1.7 соответствуют параметрам $T_1 = T_2 = 3$.

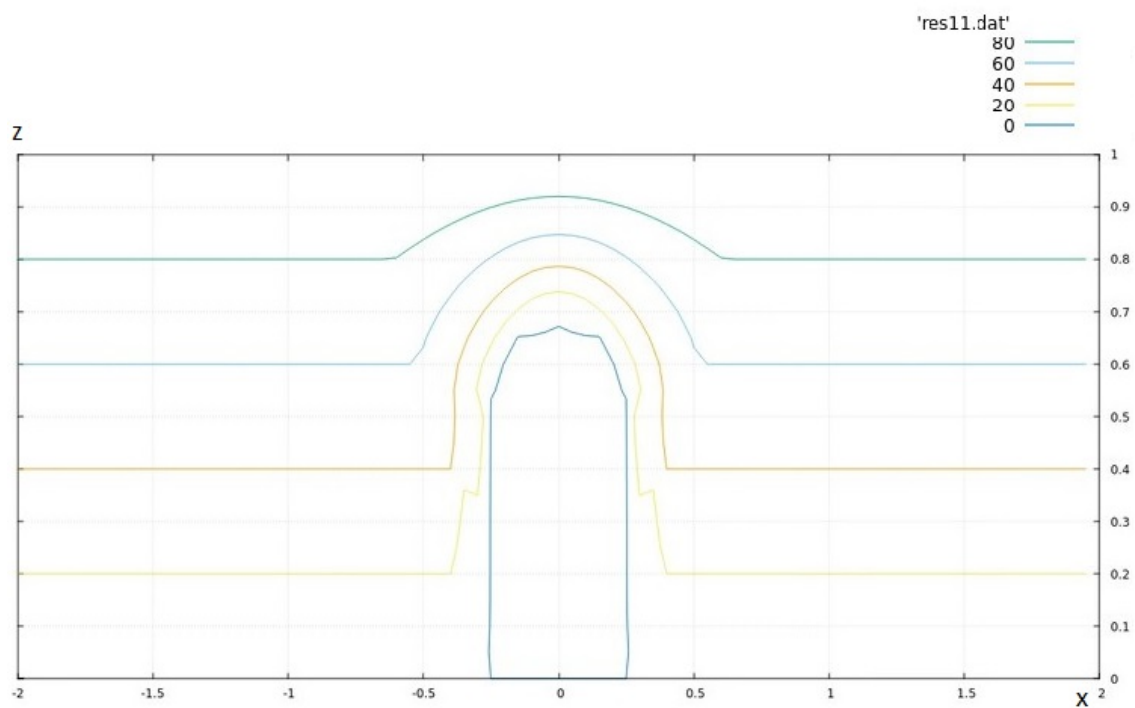


Рис. 1.2: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = 0$.

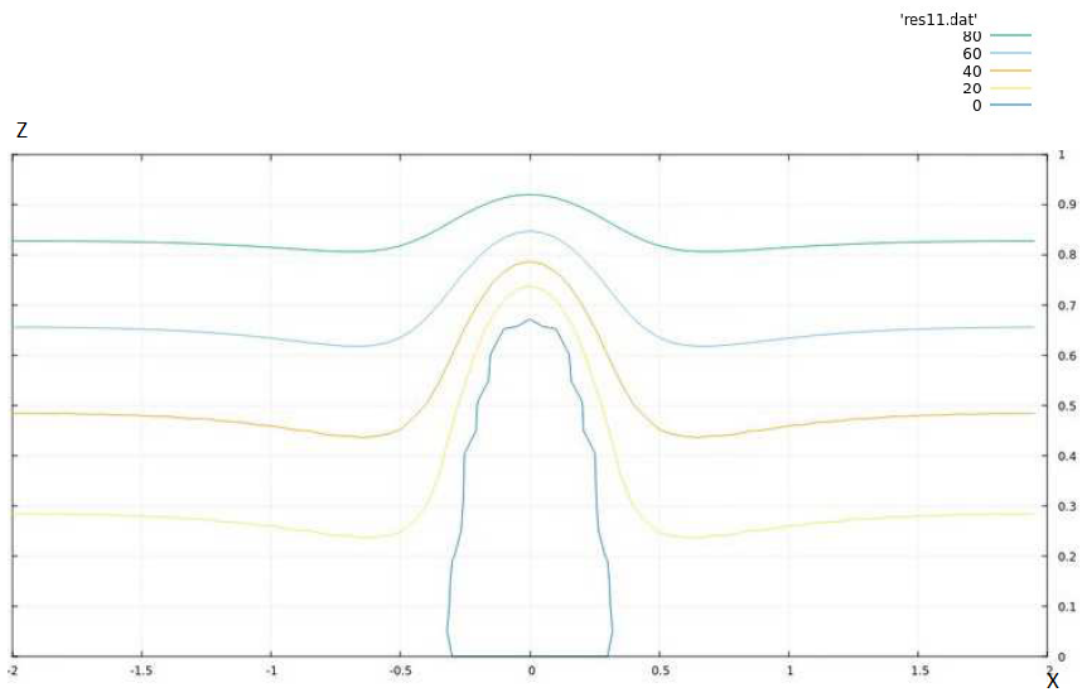


Рис. 1.3: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = x$.

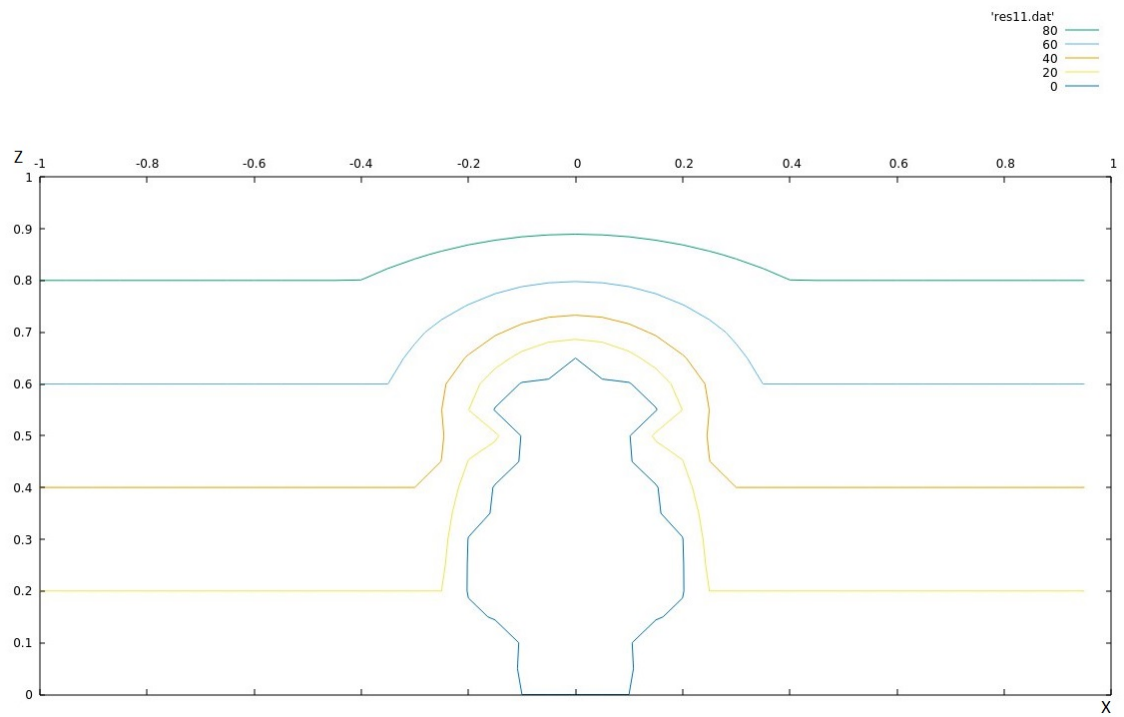


Рис. 1.4: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = 0$.

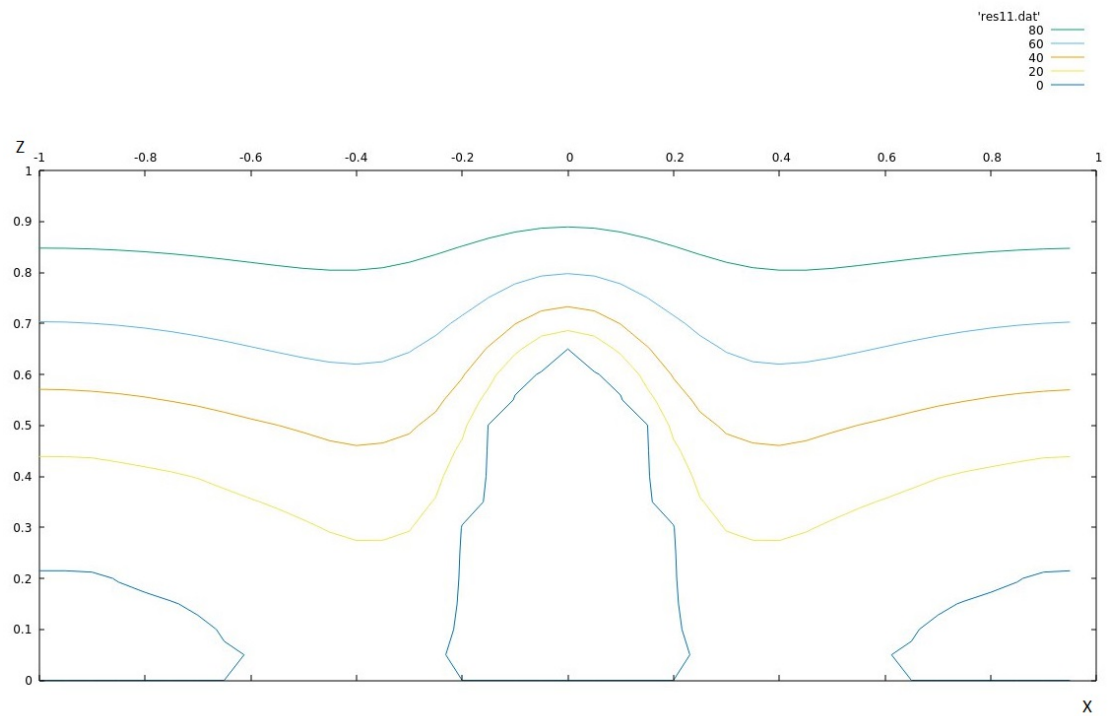


Рис. 1.5: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = x$.

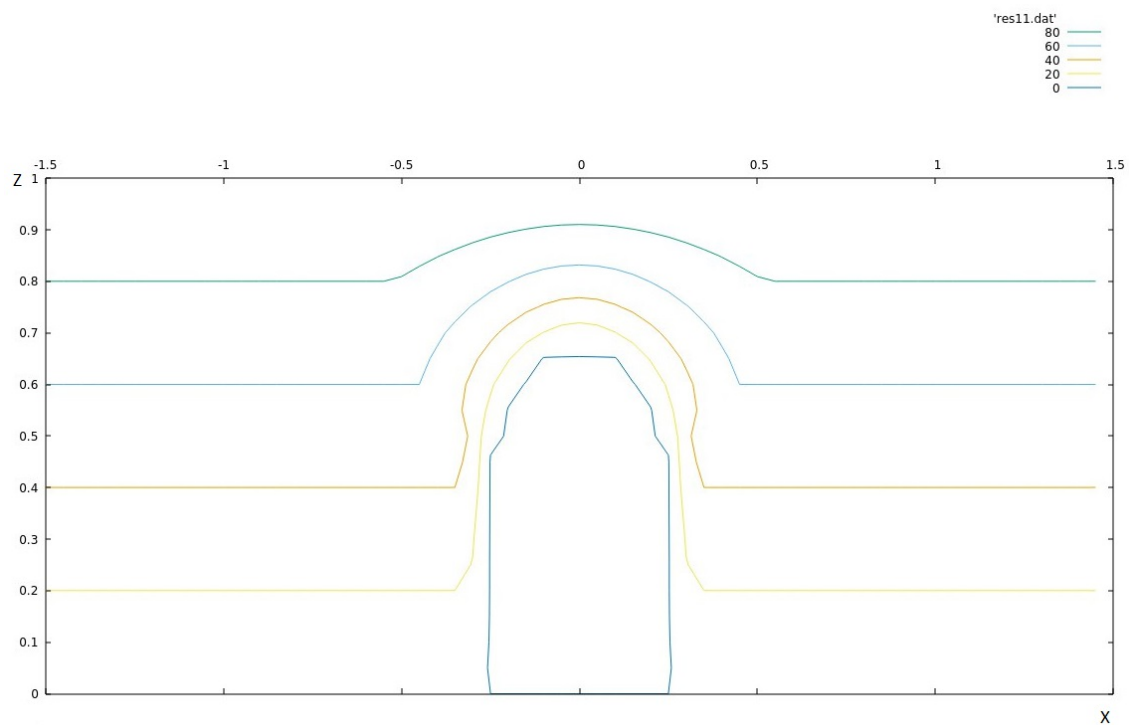


Рис. 1.6: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = 0$.

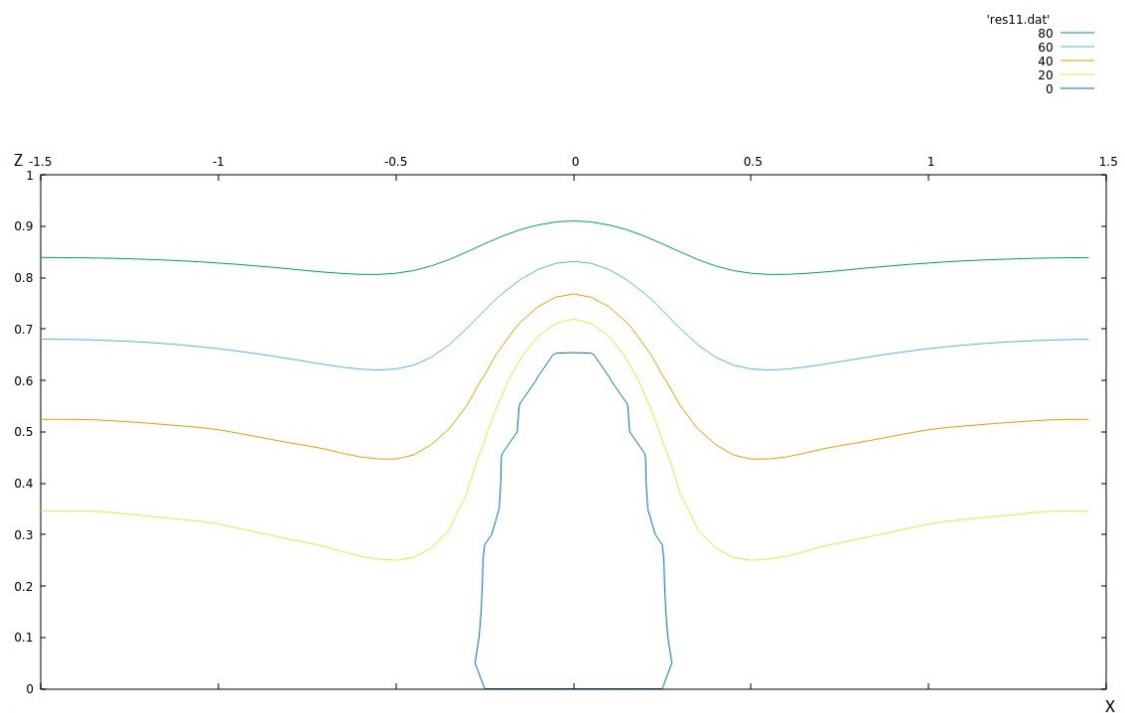


Рис. 1.7: Распределение эквипотенциалей в плоскости $y = x$.

1.4.2 Многопоточная реализация программы с использованием OpenMP

В настоящее время практически каждый компьютер имеет процессор с несколькими ядрами, даже простейшая домашняя система имеет двухъядерный процессор. При этом, большая часть программ имеет один главный поток исполнения, а значит, действия данной программы следуют друг за другом и задействовано только одно ядро процессора.

Одним из способов использования нескольких потоков, а следовательно, и ускорения задачи, является распределение вычислительной работы между ними. В данной работе задействована технология OpenMP.

OpenMP позволяет выполнять параллельные вычисления с использованием многопоточности, где задача разделяется между доступным количеством потоков. В таком случае на устройстве с несколькими ядрами потоки выполняются параллельно и ускоряют работу программы.

В итоговой программе для расчёта потенциала U технология OpenMP применяется в цикле. Для этого используется директива *pragma omp parallel for* [8].

Ускорение параллельного алгоритма:

$$R(n) = \frac{T_1}{T_n} = \frac{358.04}{49.01} = 7.31.$$

Эффективность системы из n процессоров:

$$E(n) = \frac{R}{n} = \frac{7.31}{8} = 0.91.$$

На рисунке 1.8 синей линии соответствует система с четырехъядерным процессором с частотой ядра 4.1 GHz, оранжевой — система с двухъядерным с частотой 2.2 GHz и черной — система с двумя четырехъядерными процессорами частота ядер которых 2 GHz.

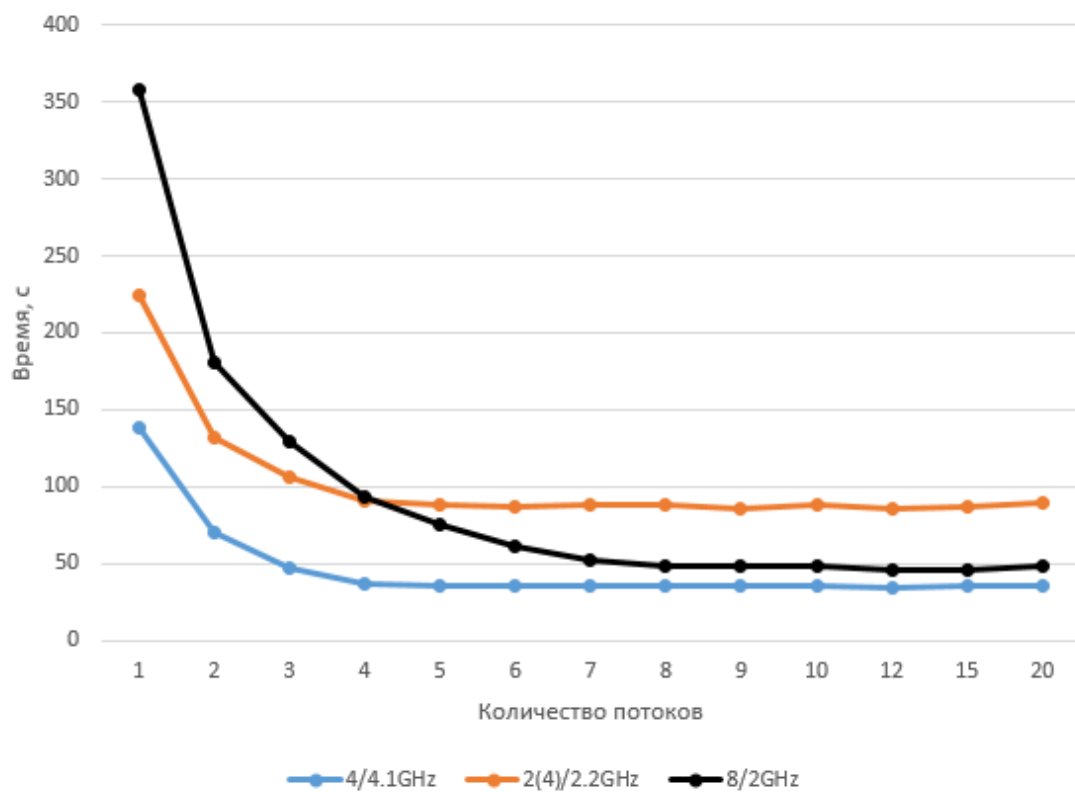


Рис. 1.8: График зависимости времени работы программы от количества потоков.

Глава 2

Расчет радиуса кривизны экрипотенциалей в системе полевых катодов

2.1 Численный расчет радиуса кривизны экрипотенциалей на оси катода

В соответствии с полученным аналитическим решением (2)–(5), радиус кривизны на оси катода при $y = 0$ определяется формулой [10]:

$$R(z) = \left| \frac{\partial U}{\partial z} / \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right| \bigg|_{x=0}.$$

Для численного расчета радиуса кривизны по данной формуле была написана программа на языке C++.

Параметры для расчета системы имеют значения: $U_0 = 100$; $z_N = 0.5$; $z_{N+1} = 1$; $N = 10$; $z_m = z_{m-1} + z_N/N$; $q_m = -100$; $m = \overline{1, N}$.

Все значения параметров приведены в безразмерных величинах.

Рисунок 2.1 соответствует значениям периодов системы $T_1 = T_2 = 4$.

Рисунок 2.2 соответствует значениям периодов системы $T_1 = T_2 = 3$.

Рисунок 2.3 соответствует значениям периодов системы $T_1 = T_2 = 2$.

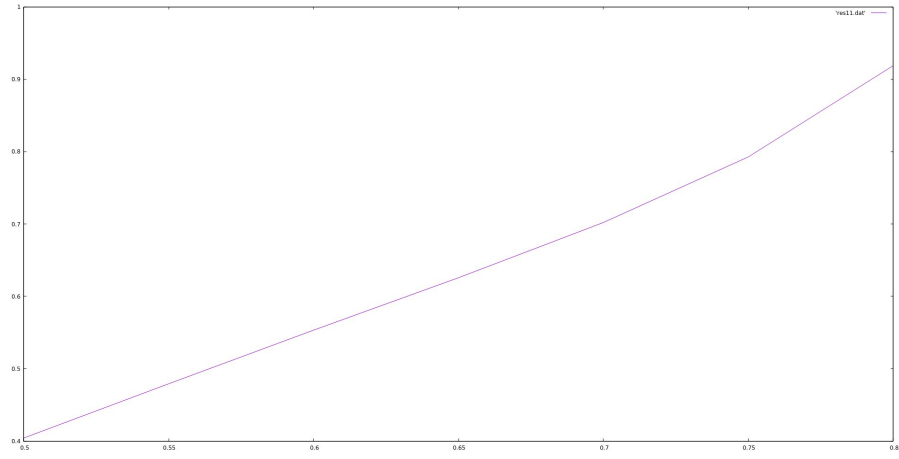


Рис. 2.1: Радиус кривизны экрипотенциалей на оси катода при $T_1 = T_2 = 4$.

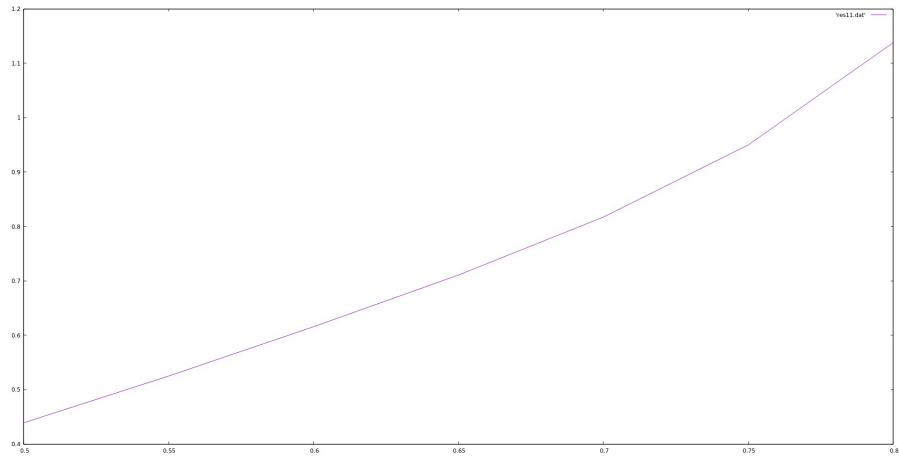


Рис. 2.2: Радиус кривизны экрипотенциалей на оси катода при $T_1 = T_2 = 3$.

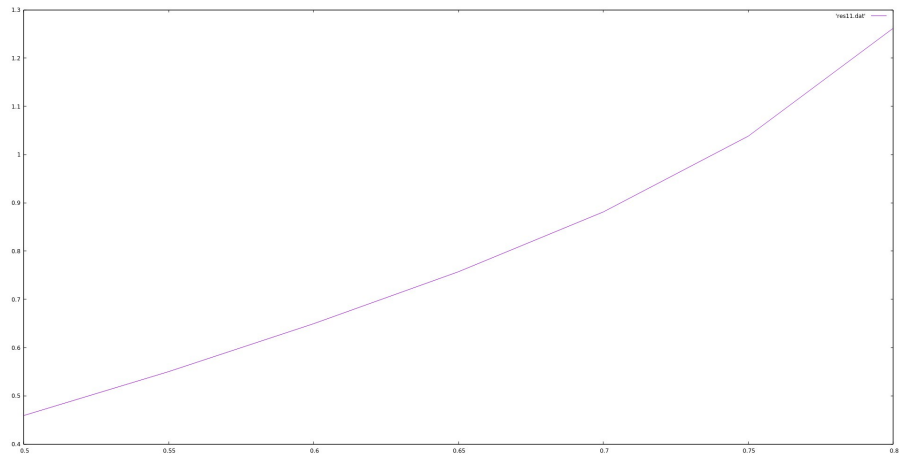


Рис. 2.3: Радиус кривизны экрипотенциалей на оси катода при $T_1 = T_2 = 2$.

z		0.5	0.55	0.6
R	$T_1 = T_2 = 4$	$7.688 * 10^{-8}$	$5.519 * 10^{-7}$	$3.309 * 10^{-6}$
	$T_1 = T_2 = 3$	$1.451 * 10^{-7}$	$1.141 * 10^{-6}$	$7.536 * 10^{-6}$
	$T_1 = T_2 = 2$	$5.742 * 10^{-7}$	$5.538 * 10^{-6}$	$1.312 * 10^{-5}$

Рис. 2.4: Таблица значений радиуса кривизны на вершине катода.

2.2 Численный расчет радиуса кривизны экрипотенциалей на плоскости $y = 0$

Для расчета радиуса кривизны на плоскости так же была написана программа на языке C++ по формуле $R = 1/K$, где [10]

$$K = \frac{-U_z'^2 U_{xx}'' + 2U_x' U_z' U_{xz}'' - U_x'^2 U_{zz}''}{(U_x'^2 + U_z'^2)^{3/2}}$$

Численное значение радиуса кривизны экрипотенциалей было найдено для тех же параметров что и в предыдущем разделе.

Рисунки 2.5 и 2.6 соответствуют значениям периодов системы $T_{1,2} = 4$.

Рисунки 2.7 и 2.8 соответствуют значениям периодов системы $T_{1,2} = 3$.

Рисунки 2.9 и 2.10 соответствуют значениям периодов системы $T_{1,2} = 2$.

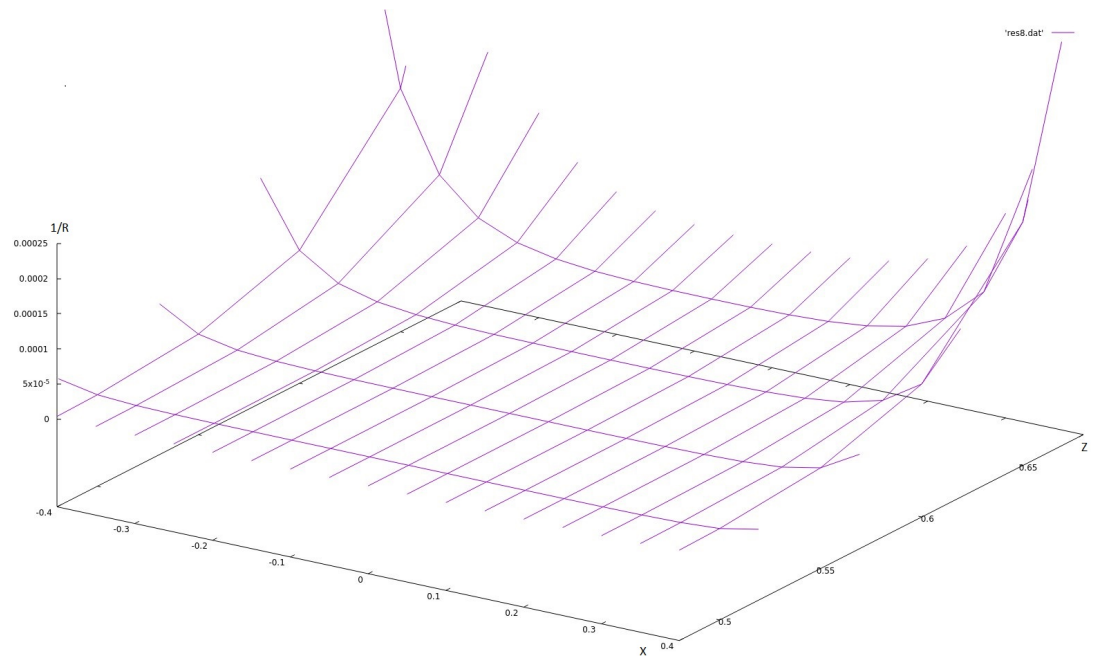


Рис. 2.5: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 4$.

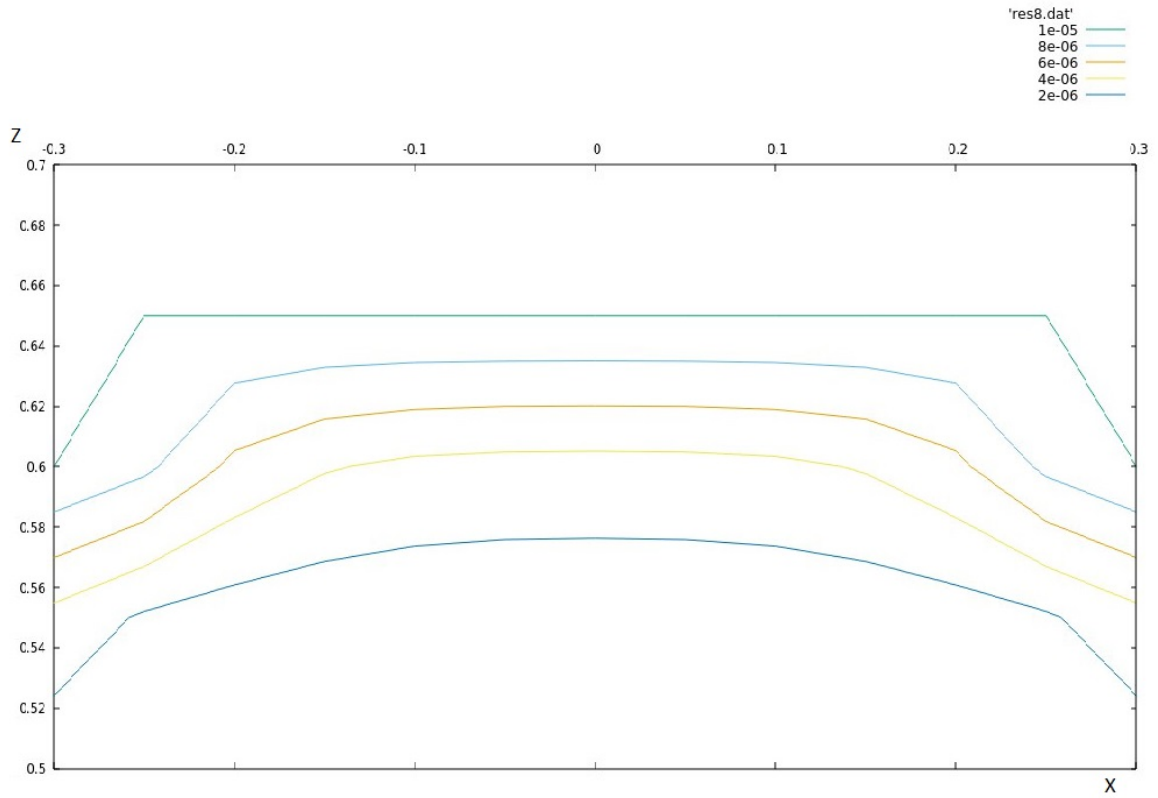


Рис. 2.6: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 4$.

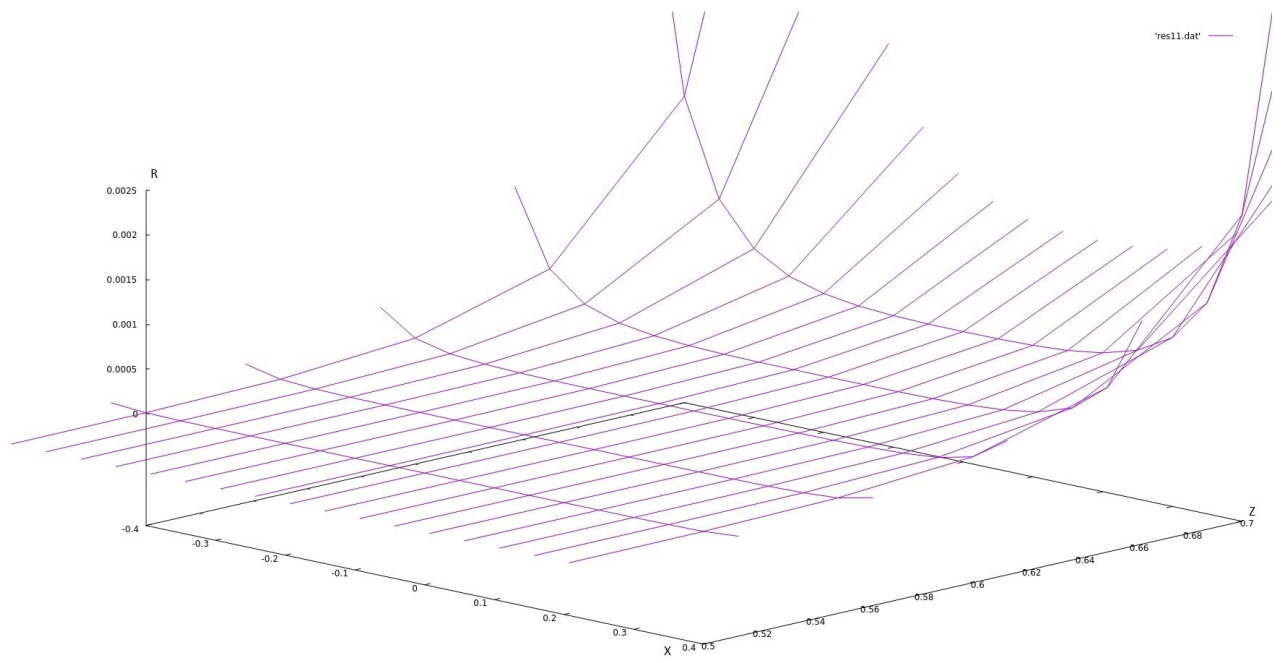


Рис. 2.7: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 3$.

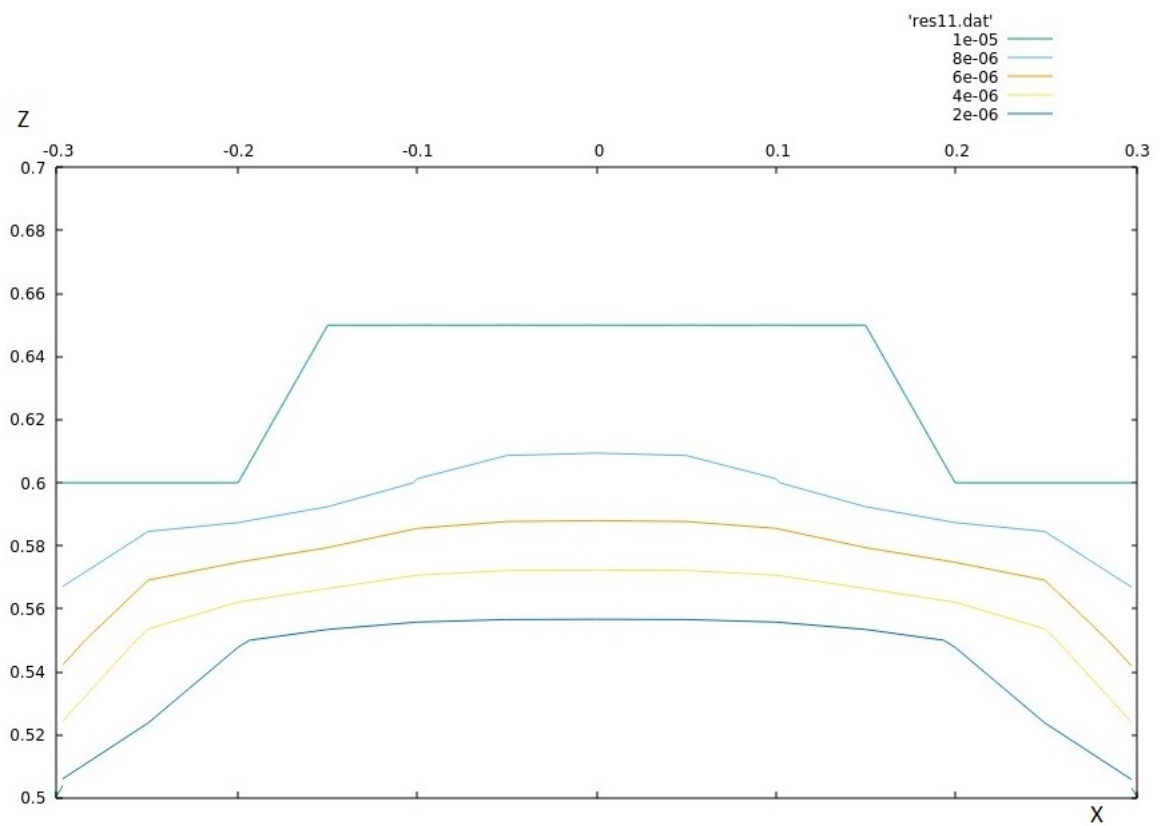


Рис. 2.8: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 3$.

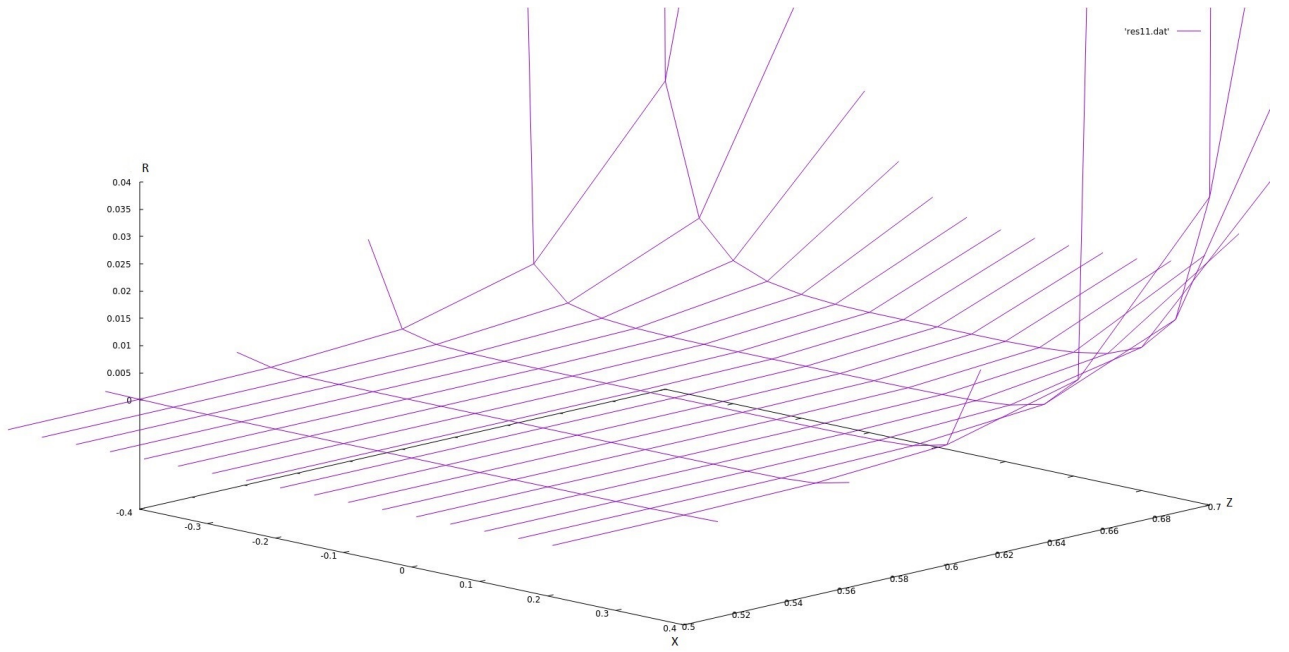


Рис. 2.9: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 2$.

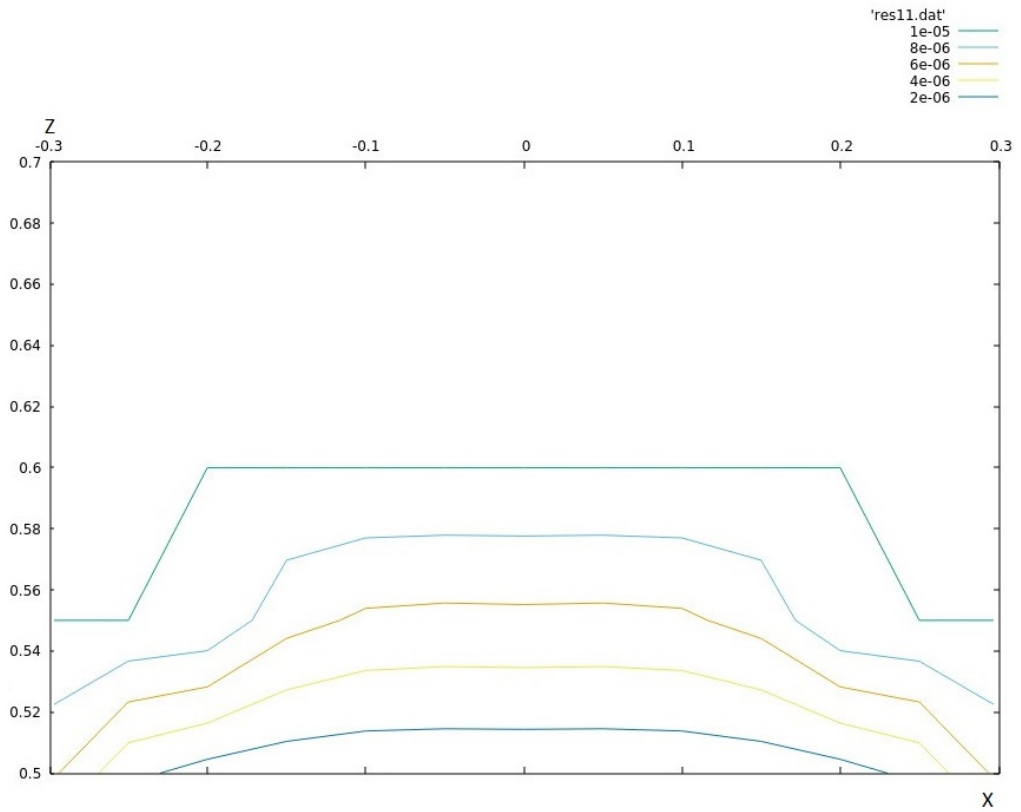


Рис. 2.10: Радиус кривизны экрипотенциалей в плоскости $y = 0$ при $T_{1,2} = 2$.

Заключение

В данной работе, в главе 1, смоделирована многоэмиттерная система, в которой каждое острие расположено в центре периодической прямоугольной решетки. Таким образом была выделена одна ячейка системы, представляющая собой диодную систему — полевой катод в форме острия на плоской подложке, напряжение на которых равно нулю, и анод в виде плоскости, параллельной подложке с заданным постоянным напряжением U_0 . Влияние полевого острия на потенциал во внутренней области ячейки заменялось влиянием системы точечных зарядов, расположенных на оси. Распределение электростатического потенциала найдено в аналитическом виде для исследуемой системы с граничными условиями (1.2) в виде рядов Фурье (1.23). Написана программа на языке C++ для численного расчета полевой диодной системы, которая в дальнейшем была оптимизирована с использованием технологии OpenMP. По полученным из программы данным были построены графики для разных размеров ячеек с одинаковым набором остальных параметров. Численные значения, полученные в этой главе, совпадают с качественно ожидаемым распределением потенциала.

Во второй главе для расчета радиуса кривизны эквипотенциалей были написаны программы на языке C++. В первом разделе данной главы использовалась формула для нахождения радиуса кривизны на оси Oz при $x = 0$, $y = 0$. При вычислении кривизны использовались параметры системы, величины которых совпадают с значениями, приведенным в пункте 1.4.1 для нахождения распределения потенциала. По данным, полученным в результате работы программы, построены двумерные графики радиуса кривизны

эквипотенциалей в области вершины острия. Во втором разделе главы была использована формула для нахождения радиуса кривизны эквипотенциалей в любой точке области. Для расчета так же использовались параметры системы, приведенные в пункте 1.4.1, и по полученным значениям были построены трехмерные графики распределения радиуса кривизны эквипотенциалей.

В соответствии с проведенными численными расчетами было установлено, что с уменьшением величины периода ячейки происходит уменьшение радиуса кривизны вершины острия. Данный факт соответствует известному экспериментальному явлению экранировки периодической системы полевых катодов при достаточно плотной упаковке эмиттеров.

Литература

- [1] Васильков М. Ю., Федоров Ф. С., Ушаков Н. М., Суздальцев С. Ю. Холодная полевая эмиссия электронов из нанотрубок диоксида титана // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 1. С. 57–63.
- [2] Соминский Г. Г., Тарадаев Е. П., Тумарева Т. А., Мишин М. В., Корнишин С. Ю. Простой в изготовлении многоострый полевой эмиттер // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 7. С. 135–137.
- [3] Chen J., Yang B., Liu X., et al. Field electron emission from pencil-drawn cold cathodes // Applied physics letters. 2016. Vol. 108(19). 193112. P. 1–5.
- [4] Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyy D. S. Mathematical modeling of field emitter array // Vacuum. 2016. Vol. 127. P. 45–50.
- [5] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
- [6] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевный Д. С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. Вып. 2. С. 139–144.
- [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.

- [8] Введение в OpenMP: параллельное программирование на C++. <https://software.intel.com/ru-ru/blogs/2011/11/21/openmp-c>
- [9] Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая Школа, 1963. 416 с.
- [10] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1981. 721 с.